МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Шуйский филиал ИвГУ

Кафедра Математики, информатики и методики обучения

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

_____ (подпись) А.С. Зинченко

«25» февраля 2025 г.

Рабочая программа дисциплины
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика; Информатика и VR-технологии

Шуя

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является формирование готовности обучающихся к решению основных задач педагогической деятельности в области образования с учетом профиля подготовки средствами анализа закономерностей различных математических структур на основе дифференциального и интегрального счисления, а также развитие абстрактного мышления обучающихся.

2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Математический анализ» является обязательной для изучения; относится к обязательной части блока дисциплин Б1, входит в предметно-методический модуль.

Успешное освоение данной дисциплины будет способствовать готовности обучающихся к освоению дисциплин: «Алгебра и теория чисел», «Элементарная математика», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дискретная математика», «Численные методы», прохождению преддипломной практики.

Студент, приступающий к изучению дисциплины, должен обладать знаниями, умениями, навыками, полученными ранее в ходе изучения школьного курса математики.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

3.1. Компетенции, формированию которых способствует данная дисциплина

При реализации дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

а) универсальные компетенции (УК) и индикаторы их достижения:

Наименование категории (группы) универсальных компетенций	Код и наименование универсальной компетенции выпускника	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции
Системное и критическое мышление	УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления и готовность к нему. УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности. УК-1.3. Анализирует источник информации с точки зрения временных и пространственных условий его возникновения. УК-1.4. Анализирует ранее сложившиеся в науке оценки информации. УК-1.5. Сопоставляет разные источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений. УК-1.6. Аргументировано

		формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение. УК-1.7. Определяет практические последствия предложенного решения задачи.

б) общепрофессиональные компетенции (ОПК) и индикаторы их достижения:

Наименование категории (группы) общепрофессиональных компетенций	Код и наименование общепрофессиональной компетенции выпускника	Код и наименование индикатора достижения общепрофессиональной компетенции
Научные основы педагогической деятельности	ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8.1. Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний. ОПК-8.2. Проектирует и осуществляет учебно-воспитательный процесс с опорой на знания основных закономерностей возрастного развития когнитивной и личностной сфер обучающихся, научно-обоснованных закономерностей организации образовательного процесса, научных основ преподаваемых предметов, их истории и места в мировой культуре и науке. ОПК-8.3. Осуществляет мониторинг и отбор программ профессионального и личностного развития.

в) профессиональные компетенции (ПК) и индикаторы их достижения:

Код и наименование профессиональной компетенции выпускника	Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции	Основание (ПС, анализ опыта)
Тип задач профессиональной деятельности: педагогический		
ПК-4 Способен выделять структурные элементы, входящие в систему познания предметной области (в соответствии с профилем и уровнем обучения), анализировать их в единстве	ПК-4.1. Выделяет и анализирует единицы различных уровней знаковой математической структуры в единстве их содержания, формы и функций. ПК-4.2. Выделяет и анализирует закономерности и явления информатики как науки в их структурном и функциональном единстве с	Профессиональный стандарт 01.001 «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего,

содержания, формы и выполняемых функций	информационно-коммуникационными технологиями. ПК-4.3. Знает и умеет анализировать аксиомы, определения и математические доказательства в единстве с прикладными аспектами использования.	основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)»

3.2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с индикаторами достижения формируемых компетенций

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

– особенности системного и критического мышления; логические формы и процедуры; основы современных технологий сбора, обработки и представления информации (УК-1 (индикаторы – 1,2,3,4,5,6,7);

– научные основы преподаваемого предмета, его историю и место в мировой культуре и науке (конкретизируются применительно к изучаемой учебной дисциплине); модели оценки компетенций учителей с использованием единых федеральных оценочных материалов; критерии высокого уровня профессиональной компетенции (ОПК-8 (индикаторы – 1,2,3);

– приемы тестирования, анализа и настройки системных и прикладных программ (ПК-4 (индикаторы – 1, 2, 3);

– теоретические сведения об архитектуре современного компьютера (ПК-4 (индикаторы – 1, 2, 3).

Уметь:

– анализировать источники информации с точки зрения временных и пространственных условий их возникновения; получать, обрабатывать и анализировать информацию из различных источников; анализировать ранее сложившиеся в науке оценки информации; аргументированно формировать собственное суждение и оценку информации; использовать современные информационно-коммуникационные технологии (включая пакеты прикладных программ, локальные и глобальные компьютерные сети) для сбора, обработки и анализа информации;читать и представлять статистические данные в различных видах (таблицы, диаграммы, графики); осуществлять корректный подбор методов анализа, проводить обработку данных исследования и правильную интерпретацию результатов; использовать программную поддержку курса и оценивать ее методическую целесообразность (УК-1 (индикаторы – 1,2,3,4,5,6,7);

– совершенствовать свои профессиональные знания и умения на основе постоянного самообразования; учитывать и создавать условия успешного самообразования в процессе учебно-профессиональной деятельности; руководствоваться в профессиональной деятельности научными основами преподаваемого предмета (конкретизируются применительно к изучаемой учебной дисциплине); соотносить основные этапы развития предметной области с ее актуальными задачами, методами и концептуальными подходами, тенденциями и перспективами ее современного развития (ОПК-8 (индикаторы – 1,2,3);

– использовать различного рода прикладные программы и языки программирования для решения учебных задач (ПК-4 (индикаторы – 1, 2, 3);

– анализировать и характеризовать готовый программный продукт в контексте решения учебных задач (ПК-4 (индикаторы – 1, 2, 3);

– выявлять в конкретной решенной задаче ошибки и недочеты, определять их природу (ПК-4 (индикаторы – 1, 2, 3).

Владеть:

– навыками сопоставления разных источников информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений; навыками определения практических последствий предложенного решения задач; технологиями анализа и синтеза информации на основе системного подхода (УК-1 (индикаторы – 1,2,3,4,5,6,7);

– способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования информационной среды; высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности; научными основами преподаваемого предмета (конкретизируются применительно к изучаемой учебной дисциплине); теоретическими и практическими знаниями для постановки и решения исследовательских задач в предметной области и в области образования (ОПК-8 (индикаторы – 1,2,3).

– базовыми понятиями и терминами в области математики и информатики (ПК-4 (индикаторы – 1, 2, 3).

4. Объём и содержание дисциплины

Очная форма обучения

Объём дисциплины составляет 10 зачётных единиц (270 час.)

Контактная работа 116,66 час.

Самостоятельная работа 154,84 час.

Виды учебных занятий и формы промежуточной аттестации	1 сем.		2 сем.		3 сем.		4 сем.	
	Контактная работа с преподавателем	Самостоятельная работа обучающегося	Контактная работа с преподавателем	Самостоятельная работа обучающегося	Контактная работа с преподавателем	Самостоятельная работа обучающегося	Контактная работа с преподавателем	Самостоятельная работа обучающегося
Лекции	12	18	12	29,75	12	28,5	12	28,25
Практические занятия	24		12		13,5		13,5	
Зачёт	-	-	0,25	-	-	-	-	-
Зачёт с оценкой	-	-	-	-	-	-	0,25	-
Групповые консультации перед экзаменом	1,5	-	-	-	1,5	-	-	-
Экзамен	0,33	25,17	-	-	0,33	25,17	-	-
Всего	37,83	43,17	24,25	29,75	27,33	53,67	27,25	28,25

4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и объемом учебных занятий

Очная форма обучения

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и объем (в часах)	Формы текущего контроля успеваемости

			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа		Самостоятельная работа обучающегося	**Формы промежуточной аттестации**
				Лаб.	Пр.		
1.	Элементы теории множеств. Понятие функции.	1	1,5	-	3	2	
2.	Элементарные функции	1	1,5	-	3	2	
3.	Числовые последовательности.	1	1,5	-	3	2	
4.	Предел функции	1	1,5	-	3	2	Контрольная работа 1
5.	Замечательные пределы. Теоремы о бесконечно малых	1	1,5	-	3	4	
6.	Непрерывность функции. Производная функции.	1	1,5	-	3	2	
7.	Дифференциал функции	1	1,5	-	3	2	
8.	Производные и дифференциалы высших порядков	1	1,5	-	3	2	Контрольная работа 2
ИТОГО 1 семестр			**12**	**-**	**24**	**18**	**Экзамен**
1.	Теоремы о средних значениях	2	1,5	-	1,5	3	
2.	Правило Лопиталя. Формула Тейлора	2	1,5	-	1,5	3	
3.	Исследование функций	2	1,5	-	1,5	3,75	
4.	Первообразная. Неопределенный интеграл	2	1,5	-	1,5	4	Контрольная работа 1
5.	Интегрирование простых дробей	2	1,5	-	1,5	4	
6.	Интегрирование рациональных функций	2	1,5	-	1,5	4	
7.	Интегрирование тригонометрических функций	2	1,5	-	1,5	4	
8.	Интегрирование иррациональных функций	2	1,5	-	1,5	4	Контрольная работа 2
ИТОГО 2 семестр			**12**		**12**	**29,75**	**Зачет**
1.	Определенный интеграл. Суммы Дарбу. Формула Ньютона-Лейбница	3	1,5	-	1,5	3	
2.	Замена переменных в определенном интеграле и интегрирование по частям	3	1,5	-	1,5	3	
3.	Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах	3	1,5	-	1,5	3	
4.	Вычисление площадей плоских фигур, заданных параметрически и в полярных координатах	3	1,5	-	1,5	3	Контрольная работа 1
5.	Вычисление площади и объема	3	1,5	-	1,5	3	

	тел вращения						
6.	Вычисление длины дуги кривой	3	1,5	-	1,5	3	
7.	Несобственные интегралы	3	1,5	-	1,5	3	
8.	Приближенное вычисление определенных интегралов	3	1,5	-	1,5	3	
9.	Физические приложения определенного интеграла	3	-	-	1,5	4,5	Контрольная работа 2
ИТОГО 3 семестр			**12**	**-**	**13,5**	**28,5**	**Экзамен**
1.	Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.	4	1,5	-	1,5	3	
2.	Частные производные. Производная по направлению. Градиент.	4	1,5	-	1,5	3	
3.	Экстремумы функций нескольких переменных.	4	1,5	-	1,5	3	
4.	Криволинейные интегралы	4	1,5	-	1,5	3	Контрольная работа 1
5.	Поверхностные интегралы	4	-	-	1,5	4,5	
6.	Двойные интегралы	4	1,5	-	1,5	3	
7.	Тройные интегралы	4	1,5	-	1,5	3	
8.	Числовые ряды	4	1,5	-	1,5	3	
9.	Функциональные ряды	4	1,5	-	1,5	2,75	Контрольная работа 2
ИТОГО 4 семестр			**12**	**-**	**13,5**	**28,25**	**Зачет с оценкой**

4.2. Развернутое описание содержания учебного материала по разделам (темам)

1. Функции и начала дифференциального исчисления

Числовые множества $\boldsymbol{N,Z,Q}$, $\boldsymbol{R}$. Свойства множества действительных чисел. Модуль действительного числа и его свойства. Ограниченные и неограниченные множества. Точная верхняя и нижняя грани множества.

Отображения и функции, способы их задания. Общие свойства функций: четность, нечетность, периодичность, ограниченность, неограниченность, монотонность. Обратная функция. Сложная функция.

Числовые последовательности. Предел последовательности. Достаточное условие существования предела последовательности. Теорема об единственности предела последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности, сравнение бесконечно малых последовательностей. Критерий Коши сходимости последовательности. Критерий существования предела монотонной последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Число e как предел последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Предел функции непрерывного аргумента по Коши и по Гейне. Свойства предела функции. Предельный переход в равенствах и в неравенствах. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций. Односторонние пределы.

Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность сложной функции. Теоремы о непрерывных функциях: о промежуточных значениях, об ограниченности на отрезке, о достижении своих точных граней. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. Непрерывность обратной функции. Точки разрыва. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций.

Определение производной. Дифференцируемость функции. Дифференциал, его геометрический и механический смыслы. Связь дифференцируемости и непрерывности. Дифференцирование суммы, произведения и частного. Производная и дифференциал сложной функции. Производная обратной функции. Производные основных элементарных функций (таблица производных). Производные и дифференциалы высших порядков.

Дифференцирование функций, заданных неявно. Параметрически заданные функции и их дифференцирование.

2. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной

Теоремы о средних значениях. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей. Признаки монотонности функции в точке и на промежутке. Максимум и минимум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольших и наименьших значений. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Применение дифференциального исчисления к исследованию функции и построению графика функции.

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших иррациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

3. Определенный интеграл и его приложения

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегрируемость функции и определенный интеграл. Нижние и верхние суммы ограниченной функции. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Основные свойства определенного интеграла.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и заменой переменной.

Вычисление площадей плоских фигур, заданных в декартовых и полярных координатах. Вычисление площадей плоских фигур, заданных параметрически. Вычисление объема тела вращения. Вычисление длины гладкой дуги. Вычисление площади поверхности вращения. Приложения определенного интеграла в физике. Несобственные интегралы.

4. Функции нескольких переменных. Ряды.

Функция двух переменных. Функция n переменных. График функции двух переменных, линии уровня. Скалярные поля. Поверхности уровня функции трех переменных. Предел функции нескольких переменных, непрерывность функции нескольких переменных.

Частные производные, дифференцируемость и дифференциал функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Дифференцирование сложной функции.

Инвариантность формы первого дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции. Вычисление частных производных неявно заданных функций.

Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Экстремумы функции нескольких переменных. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Условные экстремумы.

Криволинейные интегралы первого и второго рода. Вычисление криволинейных интегралов. Формула Грина. Криволинейные интегралы, зависящие только от начала и конца пути интегрирования. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Понятие двойного интеграла. Интегрируемость непрерывной функции. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Понятие тройного интеграла. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Приложения кратных интегралов к вычислению объемов тел и площадей гладких поверхностей.

Числовые ряды. Числовой ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютно сходящиеся ряды. Условно сходящиеся ряды.

Понятие степенного ряда. Интервал и радиус сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Задача разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд основных элементарных функций.

5. Образовательные технологии, в том числе перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Реализация дисциплины «Математический анализ» в учебном процессе предусматривает использование следующих образовательных технологий, методов и форм обучения: рейтинговая система оценивания достижений; проблемное обучение; групповая работа.

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине: мультимедиа технологии (интерактивная доска, мультимедийный проектор); технологии визуализации (электронные таблицы Microsoft OfficeExcel).

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся по дисциплине «Математический анализ» осуществляется в следующих формах: выполнение практико-ориентированных заданий для самостоятельной работы, конспектирование определенных разделов дисциплины, изучение доказательств некоторых теорем математического анализа. Организация самостоятельной работы по дисциплине «Математический анализ» направлена на формирование наиболее профессионально значимых компонент формируемых компетенций. Учебный материал для самостоятельной работы предлагается студентам в виде заданий для осуществления целеполагания, сбора необходимой информации, ее анализа с различных точек зрения, выдвижения гипотез и их проверки, формулировки выводов. Содержание заданий

разрабатывается на основе применяемых технологий обучения. Основу каждого задания составляет предметная область в рамках содержания учебной дисциплины.

Полностью весь методический материал по обеспечению самостоятельной работы студентов приводится в приложении 1 к настоящей программе. Доступ к методическим материалам осуществляется через сайт Шуйского филиала ИвГУ, в том числе через ЭБС Шуйского филиала ИвГУ на платформе «Руконт».

7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине

Оценочным средством текущего контроля успеваемости по дисциплине «Математический анализ» является контрольная работа, которая проводится в письменной форме. Контрольные работы оцениваются в соответствии с правилами рейтинговой системы оценки результатов обучения, утверждаемой в установленном порядке.

Пороговый уровень сформированности контролируемых компетенций проверяется практическими заданиями для текущего контроля, позволяющими оценить базовые компоненты проверяемых компетенций.

Критерии оценки:

1. Каждое правильно выполненное задание оценивается своим рейтинговым индексом.
2. Максимальный балл за выполнение заданий порогового уровня должен быть не менее 10.
3. Если обучающийся набирает количество баллов ниже порогового, то проверяемые компетенции считаются не сформированными.

Базовый уровень сформированности контролируемых компетенций проверяется практическими заданиями для текущего контроля, позволяющими оценить сформированность отдельных компонент или компетенций в целом.

Критерии оценки:

1. Дополнительно к заданиям, суммарный рейтинговый балл которых определяет пороговое значение уровня, для достижения базового уровня необходимо выполнить задания, так чтобы сумма баллов стала не менее 15.
2. Если обучающийся набирает количество баллов меньше указанного, то проверяемые компетенции считаются сформированными на пороговом уровне.

Повышенный уровень сформированности контролируемых компетенций проверяется практическими заданиями для текущего контроля, позволяющими формировать компетенции в целом.

Критерии оценки:

1. Для того, чтобы признать сформированность закрепленных за дисциплиной компетенций на повышенном уровне необходимо набрать не менее 21 балла.
2. Если обучающийся дополнительно к баллам базового уровня набирает количество баллов ниже 21, то проверяемые компетенции считаются сформированными на базовом уровне.

Промежуточная аттестация обучающихся по дисциплине «Математический анализ» осуществляется в виде экзамена.

В качестве оценочного средства промежуточного контроля успеваемости обучающихся по учебной дисциплине «Математический анализ» используются разноуровневые задачи и задания. Форма проведения промежуточной аттестации по дисциплине –экзамен. Форма проведения экзамена – смешанная.

Распределение семестровых рейтинговых баллов обучающихся осуществляется в соответствии со следующей таблицей:

Посещаемость учебных занятий до 10баллов

Активность на учебных занятиях	до 15 баллов
Текущий контроль 1	до 25 баллов
Текущий контроль 2	до 25 баллов
Выполнение заданий самостоятельной работы	до 15 баллов
Выполнение индивидуальных заданий	до 10 баллов

На этапе промежуточной аттестации обучающемуся предлагаются разноуровневые задачи и задания, каждая из которых имеет индивидуальный индекс, выраженный в баллах. Максимальное количество баллов, которое обучающийся может получить на экзамене составляет – 30, распределение которых осуществляется в соответствии со следующей таблицей:

Задачи и задания репродуктивного уровня	до 10баллов
Задачи и задания реконструктивного уровня	до 20 баллов

Типовые задачи промежуточной аттестации, входят в состав фонда оценочных средств по дисциплине и представлены в приложении 2 к рабочей программе.

Шкала оценки результатов освоения дисциплины «Математический анализ» на экзамене и зачете с оценкой при рейтинговой системе оценивания

Повышенный уровень	Базовый уровень	Пороговый уровень	Ниже порогового уровня
отлично	хорошо	удовлетворительно	неудовлетворительно
85-100 баллов	71-84 балла	61-70 баллов	60 и менее баллов

Шкала оценки результатов освоения дисциплины «Математический анализ» на зачете при рейтинговой системе оценивания

Повышенный уровень	Базовый уровень	Пороговый уровень	Ниже порогового уровня
зачтено	зачтено	зачтено	не зачтено
85-100 баллов	71-84 балла	61-70 баллов	60 и менее баллов

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Учебная и учебно-методическая литература:

– основная литература:

1. Асланов, Р. М. Математический анализ : краткий курс : учебное пособие : [16+] / Р. М. Асланов, О. В. Ли, Т. Р. Мурадов ; Московский педагогический государственный университет, Международная академия наук педагогического образования. – Москва : Прометей, 2014. – 284 с. : схем., ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=426687. – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-99058886-5-3. – Текст : электронный.
2. Математический анализ : учебное пособие : [16+] / сост. С. Г. Мысливец ; Сибирский федеральный университет. – Красноярск : Сибирский федеральный университет (СФУ), 2021. – 189 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=706645. – Библиогр. в кн. – Текст : электронный.
3. Протасов, Ю. М. Математический анализ : учебное пособие : [16+] / Ю. М. Протасов. – 3-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2024. – 165 с. : граф., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115118. – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-9765-1234-4. – Текст : электронный.

– дополнительная литература:

1. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учебник / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. - 5-е изд. ; испр. - Москва : Дрофа, 2004. - 640 с.
2. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : учебное пособие : в 2-х кн. Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. - 2-е изд. ;перераб. - Москва : Высшая школа, 2002. - 728 с.
3. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : учебное пособие : в 2-х кн. Кн. 2 : Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. - 2-е изд. ;перераб. - Москва : Высшая школа, 2002. - 712 с.
4. Ильин, В. А. Основы математического анализа : учебник : в 2 частях / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2009. – Часть 1. – 647 с. – (Курс высшей математики и математической физики ; выпуск 1). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76686. – ISBN 978-5-9221-0902-4. – Текст : электронный.
5. Ильин, В. А. Основы математического анализа : учебник : в 2 частях / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 5-е изд. – Москва : Физматлит, 2009. – Часть 2. – 464 с. – (Курс высшей математики и математической физики ; выпуск 2). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83225. – ISBN 978-5-9221-0537-8. – Текст : электронный.
6. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2 томах / Л. Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – Москва : Физматлит, 2009. – Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – 400 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82814. – ISBN 978-5-9221-0184-4. – Текст : электронный.
7. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник : в 2 томах / Л. Д. Кудрявцев. – 3-е изд., перераб. – Москва : Физматлит, 2010. – Том 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. – 425 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82818. – ISBN 978-5-9221-0185-1. – Текст : электронный.
8. Никольский, С. М. Курс математического анализа : учебник / С. М. Никольский. – 6-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2001. – 592 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69500. – ISBN 978-5-9221-0160-8. – Текст : электронный.
9. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : учебник для вузов. Ч. 1 / Г. М. Фихтенгольц. - 4-е изд. ; стер. - Москва : Лань, 2004. - 448 с.
10. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : учебник для вузов. Ч. 2 / Г. М. Фихтенгольц. - 4-е изд. ; стер. - Москва : Лань, 2004. - 464 с.

Интернет-ресурсы:
1. https://resh.edu.ru/ Портал Российская электронная школа

Современные профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:
1. ЭБС «Университетская библиотека онлайн»; (указать обязательно)
2. Коллекция Шуйского филиала ИвГУ на национальном цифровом ресурсе «Руконт».

Программное обеспечение:

В процессе изучения дисциплины используются офисные пакеты MicrosoftOffice, OpenOffice, программа для просмотра и чтения файлов PDFAdobeAcrobatReaderDC, программа для воспроизведения флэш-анимации в браузерах AdobeFlashPlayer, вэб-обозреватели GoogleChrome, Opera, Антивирус Касперского, 1С университет.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории
2. Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения
3. Учебная аудитория для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения
4. Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций, укомплектованная специализированной мебелью и техническими средствами обучения
5. Помещение для самостоятельной работы, оснащенное специализированной мебелью, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации
6. Учебно-наглядные пособия для занятий лекционного типа, обеспечивающие тематические иллюстрации: электронные презентации, доступ к графическим средствам построения графиков функций в различных системах координат.

Автор(ы) рабочей программы дисциплины: А.С. Кашицын, профессор кафедры математики, информатики и методики обучения, доктор физико-математических наук, доцент, Почётный работник высшего профессионального образования РФ;

Е.А. Шмелева, профессор кафедры математики, информатики и методики обучения, доктор психологических наук, профессор, Почётный работник высшего профессионального образования РФ.

Программа рассмотрена на заседании кафедры математики, информатики и методики обучения «19» февраля 2025 г., протокол №8

Программа обновлена
протокол заседания кафедры № _____ от «_____» _____20 __ г.
Согласовано:
Руководитель ОП _____ А.С. Зинченко
(подпись)

Программа обновлена
протокол заседания кафедры № _____ от «_____» _____20 __ г.
Согласовано:
Руководитель ОП _____ А.С. Зинченко
(подпись)

Программа обновлена
протокол заседания кафедры № _____ от «_____» _____20 __ г.
Согласовано:
Руководитель ОП _____ А.С. Зинченко
(подпись)

Приложение 1

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для освоения дисциплины «Математический анализ» обучающемуся необходимо изучить теоретический материал в соответствии с разделами тематического плана дисциплины и списком основной учебной литературы, а также выполнить необходимый объем практических заданий, отвечающий за формирование основных компонент профессиональных компетенций в соответствии с содержанием учебной дисциплины, соотнесенным с видами и объемом учебных занятий. Содержание заданий для самостоятельной работы обучающихся является вариативной частью программы и может изменяться от одного учебного года к другому. Далее приводятся примерные задания для самостоятельной работы обучающихся по разделам тематического плана изучения дисциплины.

План практических занятий(1 семестр)

Занятие 1. Элементы теории множеств. Понятие функции.

1. Изобразить диаграммы Венна для пересечения и объединения множеств.
2. Изобразить диаграммы Венна для разности множеств.
3. Записать основные кванторы математической логики, применяемые в математическом анализе.
4. Записать утверждение в символическом виде: для любого *x*, принадлежащего интервалу закрытому значений от*a* до *b* существует такое *y*, принадлежащее множеству A, что модуль *y-x* меньше или равно ε.
5. Выполнить операцииA∩B; A∪B; A\B; B\A если:
   1) $A=\{a,1,2\}, B=\{a,b,1\}$;
   2) $A=\{2n-1 | n\in \mathbf{N}\}, B=\{-1,0,1,2,3\}$
   3) $A=(-\infty;3), B=[-1;+\infty)$

Занятие 2. Понятие функции

1. Определить *D*(*f*) функций $\frac{\sqrt{x}}{x-2}$; $f(x)=\frac{x-8}{x^2-7x+12}$.
2. Найти*E*(*f*) 2sin(*x*); *ln*(*x*); $|x-2|<3$.
3. Найти область определения функции $f(x)=\frac{tg(x)}{1+\cos(x)}$.
4. Найти область определения функции $\frac{|x|}{x+2}$

Занятие 3. Элементарные функции

1. Решить графически задачу: квадрат какого числа равен самому числу, сложенному с его обратной величиной.
2. Найти графически корни уравнений $x^3+x-4=0$, $x^3-6x^2+9x-4=0$.
3. Решить графически уравнение $2^{-x}=x-\frac{1}{2}$.
4. Найти область определения и построить график функции $y=\ln(\sin x)$.
5. Построить главные ветви функций *y*=sinx и *y*=arcsinx.

Занятие 4. Элементарные функции

1. Графически найти приближенные значения корней уравнения $x^3+3x^2+6x-4=0$
2. Графически найти приближенные значения действительных корней уравнения $x+3=4\sqrt[3]{x^2}$
3. Построить главные ветви функций *y=cosxиy=arccosx.*
4. Построить в масштабе графики функций $\frac{1}{2^x}$; $\frac{1}{3^{-x}}$; $\log_{1/2} x$; e^x; e^{-x}
5. Изобразить графически в масштабе зависимость $y=x^2+2$ и обратной ей функции.

Занятие 5. Числовые последовательности

1. Записать в символическом виде определение предела числовой последовательности.
2. Доказать, что предел числовой последовательности $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ равен нулю.
3. Найти предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$
4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+5n-3}{n^3+7n+6}$
5. Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$ не имеет предела.

Занятие 6. Числовые последовательности

1. Определить, начиная с какого номера последовательности $\{x_n\}=\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$ величина разности $\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|$ не превышает 10^{-4}.
2. Имеют ли предел последовательности: $\{x_n\}=\left\{n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\}$ и $\{x_n\}=\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\ln(n)}\right\}$?
3. Отметить на числовой оси десять значений членов числовой последовательности $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и показать, что эта последовательность возрастающая.
4. Записать бином Ньютона для последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
5. Показать, что для любого *n* члены последовательности $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ не превосходят трех.

Занятие 7. Предел функции

1. Найти $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$, $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$, $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}$
2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$
3. Найти $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{x+1}-1}$
5. Найти $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$

Занятие 8. Предел функции

Выполнить задания из Г.Н. Берман Сборник задач по математическому анализу:№№268÷275; 281÷285; 289÷292; №307; №312.

Занятие 9. Замечательные пределы.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$
2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}$
3. Найти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$
4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
5. Найти $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$

Занятие 10. Теоремы о бесконечно малых

1. Являются ли функции $f(x)=5(x^2-5x+6)$ и $\varphi(x)=x^2-x-6$ эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 3$?
2. Какая из функций $f(x)=\arcsin(x)$ или $\varphi(x)=tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ является бесконечно малой относительно другой при $x\to 1$.
3. Определить порядок малости функций $f(x)=x^3+10x^2$; $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; $\psi(x)=\dfrac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$ при $x\to 0$ относительно функции $\alpha(x)=x$.
4. Доказать эквивалентность функций $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ и $\varphi(x)=\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$. На основе этого вычислить приближенно $\sqrt{105}$; $\sqrt{912}$; $\sqrt{260}$; $\sqrt{1632}$; $\sqrt{0{,}31}$; $\sqrt{0{,}021}$.
5. Доказать эквивалентность функций $f(x)=\ln(1+x)$ и $\varphi(x)=x$ при $x\to 0$.
6. Составить таблицу важнейших эквивалентностей.

Занятие №11. Непрерывность функции

1. Доказать непрерывность функций $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos^2(x)$.
2. Найти точку разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{|x-3|}$ и определить ее род.
3. Определить точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ и определить их род.

4. Выполнить задания №№232-239 Г.Н. Берман Сборник задач по математическому анализу.
5. Доказать непрерывность функций $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos^2(x)$.
6. Найти точку разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin(x-3)}{|x-3|}$ и определить ее род.
7. Определить точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ и определить их род.
8. №№ 232-239 Г.Н. Берман Сборник задач по математическому анализу.

Занятие 12. Производная функции

1. Доказать, что производная произведения функций равна производной первой функции на вторую плюс производная второй функции на первую.
2. Доказать, что производная степенной функции $y=x^a$, $a\in R$ равна ax^{a-1} ($x\neq 0$);
3. Доказать, что производная показательной функции $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ равна $a^x\ln a$;
4. Доказать, что производная функции $y=\arcsin(x)$ равна $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
5. Доказать, что производная функции $y=\arccos(x)$ равна $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Занятие 13. Производная функции

1. Доказать, что производная функции $y=arctg(x)$ равна $\dfrac{1}{1+x^2}$;
2. Используя правила дифференцирования сложных функций, найти y' функции, заданной уравнением: $x+\sqrt{xy}+y=2$;
3. Изобразить графически и записать аналитически уравнение касательной к эллипсу $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ в точке A(1, 1);
4. Найти область определения функций и их первых производных: $y=\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; $y=arctg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$, $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}$;
5. Найти первые производные функций: $y=xe^{-2x}$; $y=x4^{-x}$ $y=x^2e^{\frac{1}{2}x^2}$
6. Используя правила логарифмического дифференцирования найти первые производные функций: $y=x^{x^2}$; $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$; $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$;
7. Найти производные функций, заданных неявно: $y^2+x^2-1=0$; $y^3+x^3-3xy=0$.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа №517, 519, 523, 524, 527, 529, 544, 545, 550, 552, 554, 573, 574, 575.

Занятие 14. Дифференциал функций

1. Найти дифференциалы функций: $y=2x^3-3\sqrt{2x}+\ln x-1$, $y=\cos^2(2x)$, $y=2arctg(x^2)$; $y=tg^2(2x)$. В точках $x=-1;\ 0;\ 1$. Привести геометрическую интерпретацию приращения функции и дифференциала.

2. Найти дифференциал функции, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = a(\varphi - \cos\varphi)$,в точке $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ($a - const$).
3. Вычислить приращение и дифференциал функции $y = 2x\ln x$ в точке x=1, если Δx=1,5.
4. Найти приращение объема шара радиуса R=2 м, если изменение радиуса $\Delta R = 0{,}5$ м; 0,1 м. Определить относительную погрешность изменения объема шара, если ограничится линейным по ΔR слагаемым, т.е. для определения приращения функции использовать определение дифференциала.
5. Показать инвариантность формы дифференциала на примере функции $y = \sqrt{1-x^2}$.

Занятие 15. Дифференциал функции

1. Дана функция $y = x^2 + 4x$. Найти приращение функции Δy и ее дифференциал dy при x=1, сравнить их по величине, если: $\Delta x = 1; \Delta x = 0{,}1; \Delta x = 0{,}01$. Вычислить относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции дифференциалом. Пояснить графически для $\Delta x = 1$.
2. Приближенно найти значения: $arctg(1{,}05); \ln(1{,}01), \sin(31^0)$.
3. Приближенно найти значение функции $y = \sin^4\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (x-1)^2$ в точке x=1,05. Найти относительную погрешность вычисления приближенного значения.
4. Вычислить приближенно значение функции $y = \frac{1}{(tgx+1)^2}$ в точке $x = \frac{\pi}{4} + 0{,}05$.
5. Найти приближенно приращение функции $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ при изменении xот $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3} + 0{,}01$.

Занятие 16. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Найти вторые производные функций: $y = x^2 - 3x + 2$; $y = 3x^4 - \ln(2x) + 2\cos 3x$; $y = x \cdot e^{2x} + 2x$
2. Найти третью и четвертую производные функций: $y = 2\cos^2(3x)$; $y = \frac{1}{1-x}$ в точке x=0.
3. Найти общее выражение для производной порядка n функций: $y = e^{ax}$; $y = xe^x$; $y = x\ln x$
4. Вычислить дифференциалы второго порядка функций: $y = \sqrt[3]{x^2}$; $y = (x+1)^3(x-1)^2$
5. Найти вторую производную функций, заданных неявно: $x^2 + y^2 = 1; y = tg(x+y)$

План практических занятий(2 семестр)

Занятие 1. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

1. Показать, что функция $y = x^2 - 3x + 2$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на промежутке [1, 2] и найти точку $c \in [1, 2]$, в которой $y'(c) = 0$.

2. Проверить, выполняются ли условия теоремы Ролля на отрезке [-1,1] для функции $y = x^{2/3}$
3. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = x^2 - 3x + 5$ на отрезке [1,4] и найти точку *c*, удовлетворяющую условию теоремы.
4. Проверить справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^4$ на отрезке [1, 2]
5. Применяя теорему Коши, показать, что при $x \neq 0$ справедливо неравенство $1-\frac{x^2}{2} < \cos(x)$
6. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $\begin{cases} x^2, \text{при } 0 \le x \le 2 \\ 6-x, \text{при } 2 < x \le 6 \end{cases}$ на отрезке [0, 6]. Построить график этой функции.
7. Применяя теорему Лагранжа, доказать справедливость неравенства $\frac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x$
8. Функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ причем $ab>0$. Применяя теорему Коши, показать, что для этой функции выполняется равенство: $\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - c \cdot f'(c)$ где $c \in [a, b]$.
9. Показать справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=\cos(x)$ и $g(x)=\sin(x)$ на отрезке $[a, b]$.
10. Проверить справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=x^3$ и $g(x)=\text{arctg}(x)$ на отрезке [0, 1].

Занятие 2. Правило Лопиталя

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - 5x}{4x^2 + 7x}$. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} \sin x - x}{5x^2 + x^3}$. Найти $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{tg\,3x}$. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left[(x - \sin x)\ln x\right]$. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x - \sin x}$. Найти $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^{\ln x}$. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Формула Тейлора

1. Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степеням $x - 4$.
2. Разложить $x^{10} - 3x^5 + 1$ по степеням $x - 1$
3. Записать формулу Маклорена для функции $y = xe^x$.
4. Записать формулу Тейлора для функции $y = \sqrt{x}$ при x_0=4.
5. Определить абсолютную погрешность формулы Тейлора для функции $y = e^x$ в окрестности точки x=0.
6. Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням $x + 1$.
7. Разложить $(x^2 - 3x + 1)^3$ по степеням x.
8. Записать формулу Маклорена для функции $y = x^3 \ln x$ с остаточным членом в форме Лагранжа.
9. Записать формулу Тейлора для функции $y = \sin^2 x$ при x_0=0.

Занятие 3. Исследование функций

1. Найти области монотонности функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 4$.

2. Найти максимумы и минимумы функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x+\frac{2}{3}$.
3. Исследовать на экстремумы функцию $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+\frac{9}{4}$.
4. Исследовать на экстремум функцию $f(x)=(x-2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$
5. При каких размерах коробка, изготовленная из квадратного листа картона со стороной*a* имеет наибольшую вместимость?
6. Определить области возрастания и убывания функции: $f(x)=6-3x^2-x^3$;
7. Исследовать на экстремум функцию: $f(x)=x^3+6x^2+9x+2$;
8. Доказать ограниченность функций: $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ и $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$;
9. Среди прямоугольников, имеющих периметр $2a$, найти тот, площадь которого максимальна.
10. Какой из прямоугольных треугольников с фиксированным периметром имеет наибольшую площадь?

Занятие 4. Первообразная. Неопределенный интеграл.

1. Найти $\int 2xdx$, $\int x^{\frac{1}{3}}dx$, $\int\frac{1}{x^{2/3}}dx$, $\int\frac{dx}{2x}$; $\int\sqrt{x}dx$, $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$, $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$
2. Найти $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$, $\int\frac{x^4dx}{1+x^2}$; $\int\sin x\cdot\cos xdx$, $\int tg(x)dx$, $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$

Интегрирование с помощью замены переменной

1. Найти $\int\sqrt{2x-3}dx$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$
2. Найти $\int xe^{x^2}dx$; $\int x\sqrt{x-2}dx$, $\int\cos^2 x\cdot\sin xdx$.
3. Найти $\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}dx$.
4. Найти $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x}$.
5. Найти $\int\frac{dx}{\sin x}$

Интегрирование по частям

1. Найти $\int x\sin(x)dx$, $\int x\ln(x)dx$
2. Найти $\int\arcsin(x)dx$; $\int x^2\cos(x)dx$
3. Найти $\int e^x\sin(x)dx$; $\int xe^xdx$
4. Найти $\int x^2\sin(x)dx$, $\int x^2\ln(x)dx$
5. Найти $\int\ln^2(x)dx$

Занятие 5. Интегрирование простых дробей

1. Найти $\int \frac{2dx}{3x+2}, \int \frac{dx}{(2x-5)^3}$;
2. Найти $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+2x+10}$,
3. Найти $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x-3}$
4. Найти $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$

1. Найти $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$;
2. Найти $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+2x+10}, \int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x-10}$
3. Найти $\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+2x+2)^2}$
4. Вычислить $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geq 2$, $p - \frac{q^2}{4} > 0$.

Занятие 6. Интегрирование рациональных функций

1. Найти $\int \frac{(9-5x)dx}{x^3-6x^2+11x-6}$;
2. Найти $\int \frac{x^2dx}{x^3-3x+2}$;
3. Найти $\int \frac{xdx}{x^3+1}$;
4. Найти $\int \frac{(x^3+x^2+2)dx}{x\cdot(x^2-1)^2}$;
5. Найти $\int \frac{(x^4+2x^2+4)dx}{(x^2+1)^3}$;

1. Найти $\int \frac{(x^2+2)dx}{x^3+x^2-2x}$;
2. Найти $\int \frac{2xdx}{x^2+3x-4}$;
3. Найти $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$;
4. Найти $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2)^2(1+x)}$;
5. Найти $\int \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4-5x^2+4}$;

Занятие 7. Интегрирование тригонометрических функций

1. Выразить $\sin(x)$ и $\cos(x)$ через t, если $t = tg\frac{x}{2}$.
2. Применяя универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$, вычислить $\int \frac{dx}{9+8\cos(x)+\sin(x)}$.
3. Применить универсальную тригонометрическую подстановку и подстановку t=sin(x) для вычисления интеграла $\int \frac{\cos^3(x)}{2+\sin(x)}dx$.
4. Показать, что если функция R(sinx, cosx) нечетна относительно cos(x), то $\int R(\sin x, \cos x)dx$ подстановкойt= sin(x)приводится к интегралу от рационально функции.

1. Показать, что если функция R(sinx, cosx) нечетна относительно sin(x), то $\int R(\sin x, \cos x)dx$ подстановкойt= cosxприводится к интегралу от рационально функции.
2. Вычислить $\int \frac{\cos^3(x)}{2+\sin(x)}dx$
3. Показать, что если функция R(sinx, cosx) четна относительно sin(x) и cos(x), то $\int R(\sin x, \cos x)dx$ подстановкой t=cos(x) приводится к интегралу от рациональной функции.
4. Вычислить $\int \frac{dx}{\sin^2(x)+6\sin(x)\cos(x)-16\cos^2(x)}$
5. Вычислить $\int \sin(7x)\sin(2x)dx$

Занятие 8. Интегрирование иррациональных функций

1. Вычислитьинтеграл $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$.
2. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)}\frac{1}{(2-x)^2}dx$
3. Найти интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$
5. Методом неопределенных коэффициентов найти $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$
6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$
7. Методом неопределенных коэффициентов найти $\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx$

План практических занятий (3 семестр)

Занятие №1. Определенный интеграл. Формула Ньютона Лейбница

1. Записать определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Вычислить определенные интегралы $\int_0^1 2\sqrt{x}dx$ и $\int_1^0 2\sqrt{x}dx$. Сделать вывод;

3. Используя определение определенного интеграла доказать, что $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
4. Оценить значения интегралов: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}$; $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$;
5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} e^x, 0 \le x \le 1 \\ 3-x, 1 < x \le 3 \end{cases}$
6. Вычислить $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$; $\int_4^1 \frac{dx}{x^3}$; $\int_1^4 \frac{(1+x)dx}{\sqrt{x}}$; $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; $\int_{0,5}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Занятие №2. Замена переменных в определенном интеграле и интегрирование по частям

1. Найти: $\int_0^5 x\sqrt{4+x^2}\,dx$; $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$; $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$; $\int_{\pi}^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x+1}$
2. Найти $\int_0^{\pi} x\sin(x)dx$; $\int_0^{\pi} x^2\sin(x)dx$; $\int_1^4 x^2\ln(x)dx$; $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$; $\int_0^{\pi/4} xtg^2 x dx$

Занятие №3. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = x^3$ и прямой $y = x$;
2. Вычислить площадь между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3,5), осью ординат и осью абсцисс.
3. Вычислить площадь фигур, ограниченных следующими линиями:
   - Осями координат, прямой $x = 3$ и параболой $y = x^2 + 1$;
   - Осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и линией $y = e^x + 2$ $(b > a)$;
   - Осью абсцисс и дугой синусоиды $y = \sin(x)$, соответствующей первому полупериоду;
   - Параболами $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$;
   - Графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.
4. Геометрически и аналитически найти значение определенного интеграла $\int_0^1 (2x+1)dx$.
5. Построить график функции $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 1 \\ x+1, x \ge 1 \end{cases}$ и найти значение интеграла $\int_0^2 f(x)dx$.
6. Найти зависимость площади S под графиком функции $y = 2x \cdot \cos(5x)$ от x.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.
8. Показать, что если на отрезке [a;b] некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $\varphi(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x=a$ и $x=b$ равна $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$;
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x$, $x=1$ и координатными осями.

10. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.
11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

Занятие № 4. Вычисление площади плоских фигур, заданных параметрически и в полярных координатах

1. Записать выражение, определяющее площадь плоской фигуры ограниченной линиями, заданными параметрически.
2. Найти площадь фигуры (астроида), ограниченную линиями: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями: $x = \cos t$, $y = \sin t$.
4. Изобразить графически и найти площадь фигуры, ограниченную линиями: $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$

1. Записать связь декартовых и полярных координат и записать выражение, определяющее площадь плоской фигуры в полярной системе координат.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi$
3. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $\rho = a^2 \cos 2\varphi$
4. Найти площадь фигуры, ограниченную одним витком спирали Архимеда $\rho = \varphi$;
5. Изобразить графически и перейдя к полярным координатам найти площадь замкнутой области $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (Декартов лист)

Занятие №5. Вычисление объемов и площади поверхности тел вращения

1. Получить выражение, определяющее объем фигуры вращения относительно оси OX.
2. Найти объем тела, полученного вращением параболы $y^2 = 2x$, ограниченной прямой $x = 3$ вокруг оси OX.
3. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX .
4. Найти объем тела, полученного вращением параболы $y^2 = 2x$, ограниченной прямой $x = 3$ вокруг оси OX.
5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $2x - y - 2 = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

1. Получить выражение, определяющее объем фигуры вращения относительно оси OY.
2. Найти объем тела, полученного вращением путем вращения плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 3 + \sqrt{x}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $y = x + 1$ относительно оси OY.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1 + x^2}$ и $y = x^2$.
4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямыми $y = \pm 3$

Занятие №6. Вычисление длины дуги кривой

1. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$, отсеченной осью OX.
2. Вычислить длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $A(1; 1)$ до точки $B(2; 4)$

3. Вычислить длину дуги кривой $x = \ln\cos y,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{3}$
4. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 7\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases},\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$
5. Вычислить длину дуги кривой, заданную в полярной системе координат $r = \sqrt{2}e^{\varphi},\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Занятие №7. Несобственные интегралы

1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$;
2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$;
3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$;
4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;
5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;

1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{3/4}^{1} \frac{xdx}{\sqrt[5]{3-4x}}$;
2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$;
3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^{1/e} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$;
4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{(1-x^4)^3}}$;
5. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $-\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

Занятие №8. Приближенное вычисление определенных интегралов.

1. Вычислить аналитически и приближенно (шаг интегрирования $h=\pi/5$, $\pi/10$ и $\pi/20$) $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ Сравнить полученные значения и привести геометрическую интерпретацию вычислений.

2. Методом прямоугольников с левыми, правыми и центральными ординатами найти значение интеграла $\int_0^3 x^2 e^{-x} dx$ для n=10. Привести графическую интерпретацию вычислений.
3. С точностью 0,01 методом трапеций найти значение интеграла $\int_0^3 x^2 e^{-x} dx$. Иллюстрировать графически.
4. С точностью 0,01 методом Симпсона найти значение интеграла $\int_0^3 x^2 e^{-x} dx$. Иллюстрировать графически.
5. Выбрать пределы интегрирования и сравнить результаты вычисления определенного интеграла с точностью 0,01 функции $y = x^3 e^{-\sin x}$ различными методами.

Занятие №9. Физические приложения определенного интеграла

1. Скорость прямолинейного движения тела равна $\sqrt{1+t}$ м/с. Найти расстояние, пройденное телом за 10 с после начала его движения (t=0).
2. Тело движется прямолинейно по закону $x(t) = t^{\frac{3}{2}} + 2\sin(2t) - 3\ln\left(\frac{t}{2}\right)$. Найти скорость и ускорение тела в момент времени t=4с.
3. Найти изменение импульса тела за 2 с, если на него действует сила $F = 2\sin(2t) + 3\sqrt{t} + 2t^{1/2}$ Пояснить решение задачи графически.
4. Стержень длиной lи массой m_1 притягивает материальную точку массы m_2, которая лежит на его продолжении на расстоянии a от ближайшего конца. Найти силу взаимодействия стержня и материальной точки в соответствии с законом Всемирного тяготения, записанного для двух материальных точек в виде: $F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, где G-гравитационная постоянная равная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2).
5. Найти среднюю силу давления воды на стенку аквариума шириной 50 см, длиной 1 м и высотой 30 см, если он заполнен полностью. Плотность воды – 1 г/см^3.
1. Скорость движения тела вдоль оси OX равна $2t$ м/с, а вдоль оси Ouравна t м/с. Найти пройденный телом путь за 5 с после начала его движения.
2. Вычислить среднюю силу, с которой вода давит на плотину, имеющей форму равнобедренной трапеции, верхнее основание которой 6,4 м, нижнее 4,4 м, высота 3 м.
3. Найти изменение импульса тела за 5с, если на него действует сила $F = 2t + 2\sqrt{t} + 2t^{3/2}$. Пояснить решение задачи графически.
4. С какой силой полукольцо радиуса Rи массы m_1 притягивает материальную точку массы m_2, находящуюся в его центре.
5. Найти среднее давление на стенку аквариума, имеющей форму равнобедренной трапеции, основание которой 30 см, а высота 50 см. Аквариум заполнен водой (плотность воды – 1 г/см^3).

План практических занятий (4 семестр)

Занятие№1. Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность.

1. Изобразить графически область определения функции $z = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{4-y^2}$.
2. Найти и изобразить графически область определения функции $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.
3. Найти расстояние между двумя точками трехмерного $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(3, 2, 0)$ и четырехмерного пространства $M_1(1, 2, 3, 4)$ и $M_2(3, 2, 1, 0)$.
4. Построить графически линии уровня функции $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$.

1. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$;
2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$;
3. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$;
4. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
5. Показать, что функция $f(x, y, z) = \frac{xy + z}{xy - z}$ при$x\to 0$ и $y\to 0$не имеет предела.
6. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$;

1. Показать непрерывность функции $z = x \cdot y$ на всей плоскости XY.
2. Является ли функция $\begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, \text{если } x \neq y \\ 0, \text{если } x = y \end{cases}$ непрерывной в точке (1/π, 1/π)?
3. Исследовать на непрерывность в точке $M(0,0)$ функцию:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x + y}, & \text{если} \quad 2x + y \neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad 2x + y = 0 \end{cases}$$
4. Исследовать на непрерывность в точке $M(0,0)$ функцию:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Занятие№2.Частные производные. Производная по направлению. Градиент

1. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^2 y^3 + 3x^4 + 5y - 7$
2. Вычислить частные производные первого порядка функции $z = x^2 y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$ в точке $M_0(2;1)$. Найти производные второго порядка.
3. Найти частные производные первого порядка функции $z = e^x(\cos y + x \sin y)$
4. Найти частные производные первого порядка функции $z = arctg\left(x\sqrt{y}\right)$

5. Найти частные производные первого порядка функции $z = \frac{2^y}{y} + x^2 tgx + \ln\left(x^2 + y^3\right)$.

1. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке M(3,1) по направлению от этой точки к точке M_1(6, 5).
2. Найти производную функции $z = y^2 x^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2,1) в направлении от этой точки к началу координат.
3. Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке (1,1,2) в направлении, образующем с осями координат углы соответственно 60, 45, и 60 градусов.
4. Найти проекции градиента функции $z = 2x^3 + x^2 y + x^2 y - 1$ в точке (1,1) на оси декартовой системы координат.
5. Найти градиент функции $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точке (2, 1).

Занятие№3. Экстремумы функций нескольких переменных

1. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy$
2. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$;
3. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$
4. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
5. Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = y^3 + 5x$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ и построить графики функции и уравнение связи переменных.

Занятие №4. Криволинейные интегралы

1. Вычислить интеграл $\int_L ydl$ от точки A(0, 0) до точки B(1, $\sqrt{2}$) по кривой $y^2 = 2x$.
2. Вычислить интеграл $\int_L \frac{1}{x - y} dl$ по линии $y = \frac{1}{2}x - 2$ между точками A(0, -2) и B(4, 0).
3. Вычислить $\int_L xydl$ по контуру прямоугольника с вершинами A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2)
4. Вычислить $\int_L xydl$ по дуге окружности, заданной уравнениями: $x=cost$, $y=sint$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.
5. Вычислить $\int_L \sqrt{2y} dl$ по первой арке циклоиды: $x=t-sint$;$y=1-cost$.

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \frac{y-1}{x} dx + \frac{x+1}{y} dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(1; 1)$ до точки $B(3; 2)$. Выполнить чертёж.
2. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$ от точки $A(1; 2)$ до точки $B(4; 3)$ вдоль ломаной, состоящей из отрезков прямых $y = 2, y = x - 1$. Выполнить чертёж.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \frac{y^2}{x}dx + x^2dy$, где L – дуга кривой $y = \ln x$ от точки $M(1; 0)$ до точки $N(e; 1)$.
4. Проверить, существует ли интеграл по данной кривой, и вычислить его, если это возможно
$\int_L \frac{y^2+1}{x-2}dx - \frac{x}{y+2}dy$ – по дуге параболы $y = -\sqrt{x}$ от точки $M(1; -1)$ до начала координат. Выполнить чертёж.
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x^2ydy - y^2xdx$ по кривой $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t}, \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Занятие 5. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого рода

1. С помощью поверхностного интеграла найти площадь фрагмента плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенного в 1 октанте. Сделать рисунок.
2. Вычислить $\iint_S (x - 3y + 2z)ds$ где Sчасть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенной в первом октанте (изобразить графически).
3. Вычислить $\iint_S x(y + z)ds$ где Sчасть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1 - y^2}$, отсеченной плоскостями z=0, z=2 (изобразить графически).

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить $\iint_S x(y + z)ds$ где Sчасть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1 - y^2}$, отсеченной плоскостями z=0, z=2 (изобразить графически).
2. Вычислить интеграл $\iint_S xyzds$, где S– фрагмент конической поверхности $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, заключенный между плоскостями: z=0, z=2.
3. Вычислить $\iint_S (x - 3y + 2z)ds$ где S часть плоскости $4x + 3y + 2z - 4 = 0$, расположенной в первом октанте (изобразить графически).
4. Вычислить $\iint_S x(y + z)ds$ где S часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1 - y^2}$, отсеченной плоскостями z=0, z=2 (изобразить графически).

Поверхностные интегралы второго рода

4. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (x - 3y + 6z)dzdy$ по верхней стороне плоскости $x - y - 2z + 4 = 0$.
5. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (x + z)dxdy + (x + 3y)dxdz + ydxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + 2y + z = 2$, расположенная в 1 октанте.

6. Вычислить $\iint\limits_S (x+z)dxdy + (x+3y)dxdz + ydxdy$ по внешней стороне плоскости $x - y - 2z + 4 = 0$ ограниченной координатными плоскостями двумя способами.
7. Вычислить $\iint\limits_S (x+xz)dydz + ydxdz + (z - x^2)dxdy$ по внешней стороне полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ расположенной в верхней части полупространства.

Задания для самостоятельно работы

Г.Н. Берман Сборник задач по курсу математического анализа №3887-3891.

Занятие№6. Двойные интегралы

1. Найти $\iint\limits_D xydxdy$ по прямоугольной области, ограниченной линиями x=0, x=1, y=0, y=2.
2. Найти $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, если область интегрирования задана уравнениями: x=1, $y=x^2$, y=0.
3. Найти $\iint\limits_D (xy)dxdy$, если область интегрирования задана уравнениями: $y=x+2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-1$ и $x+y=5$
5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y= e^x$, $y= e$, x=0.

Занятие№7. Тройные интегралы

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2;\ x + y - 1 \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$
2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY $y = \sqrt{x};\ y = x^2;\ x + y + z - 2 = 0,\ (z \ge 0)$
3. С помощью тройного интеграла найти объём тела, заданного ограничивающими его поверхностями: $x^2 + y^2 = 2,\ y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 15x$
4. Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями $z = 0;\ y + z - 2 = 0;\ x^2 + y^2 = 4$. Выполнить чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY
5. Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями $z = 0;\ x^2 + y^2 - z = 0;\ x^2 + y^2 = 4$. Выполнить чертежи данного тела и его проекции на плоскость XOY.

Занятие№8. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости

1. Записать первые три члена ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1),\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$$

2. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots,\ \frac{2}{\sqrt[5]{7}}+\frac{4}{\sqrt[5]{14}}+\frac{8}{\sqrt[5]{21}}+\ldots$$

3. Записать определение геометрической прогрессии и выражение, определяющее ее сумму.

4. Записать необходимый признак сходимости числового неотрицательного ряда.
5. Исследовать на сходимость по необходимому признаку ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^2+4}$$

Признак сходимости Даламбера

1. Сформулировать признак сходимости положительного числового ряда Даламбера
2. Исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$$

3. Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

Признаки сходимости Коши.

1. Сформулировать признаки сходимости Коши.
2. Используя радикальный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$$

3. Используя интегральный признак Коши исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$$

Задания для самостоятельной работы

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Используя признак Лейбница исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+5},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$$

Занятие№ 9. Функциональные ряды

1. Разложить функцию $f(x)=x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi,\pi]$. Построить график $f(x)=x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и частичной суммы $S_2(x)$.
2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$. Начертить график функции и полной суммы ряда.

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{если } -\pi\le x\le 0\\ 0, & \text{если } 0<x\le\pi\end{cases}$$